

RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE PAR LA METHODE D'EULER CORRECTION



I. EXPERIENCE

• Une bille d'acier tombe verticalement dans de l'huile (voir photo). Une chronophotographie de l'expérience et un pointage Aviméca ont permis d'obtenir le graphe $v(t)$ ci-contre.

• La vitesse limite v_{lim} et le temps caractéristique τ de la chute sont rappelés sur le graphe.

• Les caractéristiques de la bille d'acier sont :

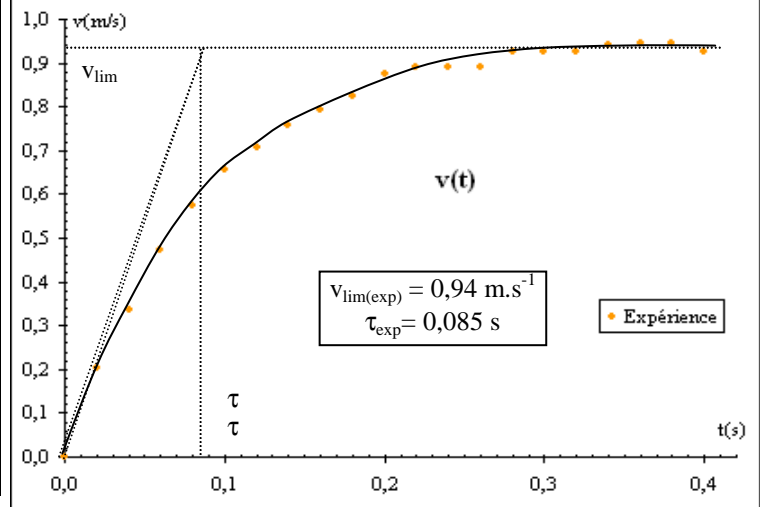
- Masse : $m = 4,08 \text{ g}$; Diamètre : $d = 10 \text{ mm}$;

Volume V .

- Masse volumique de la bille : $\rho = 7\,796 \text{ kg.m}^{-3}$

- Masse volumique de l'huile : $\rho_h = 920 \text{ kg.m}^{-3}$.

- Intensité de la pesanteur : $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$



II. MODELISATION DE LA CHUTE

• Selon le type de force de frottement que l'on considère, l'équation différentielle du mouvement sur la vitesse s'écrit :

$$\text{Cas n°1: } f = k_1 \cdot v \quad \frac{dv}{dt} + A_1 v = B \quad (1)$$

$$\text{Cas n°2: } f = k_2 \cdot v^2 \quad \frac{dv}{dt} + A_2 v^2 = B \quad (2)$$

avec $A = \frac{k}{m}$ et $B = g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho} \right)$

1) Valeur de la constante **B** avec **3 chiffres significatifs**: $B = g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho} \right) = 9,80 \times \left(1 - \frac{920}{7796} \right) = 8,64 \text{ m.s}^{-2}$.

2) Si $v = v_{lim} = 0,94 \text{ m.s}^{-1} = \text{cte}$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$:

dans l'équation (1): $A_1 \cdot v_{lim} = B \Leftrightarrow A_1 = \frac{B}{v_{lim}} = \frac{8,64}{0,94} = 9,19 \text{ s}^{-1}$

dans l'équation (2): $A_2 \cdot v_{lim}^2 = B \Leftrightarrow A_2 = \frac{B}{v_{lim}^2} = \frac{8,64}{(0,94)^2} = 9,78 \text{ m}^{-1}$

3) Expressions numériques des deux équations différentielles:

$$\frac{dv}{dt} + 9,19 \cdot v = 8,64 \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + 9,78 \cdot v^2 = 8,64 \quad (2)$$

III RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE SELON LA METHODE D'EULER

1) La méthode d'Euler

• Principe : pour des intervalles de temps Δt "petits" on peut faire l'approximation suivante: $a(t) = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

soit : $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \times \Delta t$.

Δt est appelé **pas d'itération** de la méthode d'Euler. L'expression de $a(t)$ dépend du modèle utilisé.

Dans la suite on choisit : $\Delta t = 0,010 \text{ s}$.

2) Calculs "à la main"

• Cas n°1 : modélisation en $f = k_1 \cdot v$:

La bille est lâchée **sans vitesse initiale** à la date $t_0 = 0,000$ s .

a) $a_1(t) = \frac{dv}{dt} = B - A_1 \cdot v = 8,64 - 9,19 \times v(t)$

b)

| t(s) | v(t) en (m.s ⁻¹) | a ₁ (t) en (m.s ⁻²) |
|--|------------------------------|--|
| t ₀ = 0,000 | 8,640 | 0,000 |
| t ₁ = t ₀ + Δt = 0,010 | 7,846 | 0,086 |
| t ₂ = t ₁ + Δt = 0,020 | 7,125 | 0,165 |
| t ₃ = t ₂ + Δt = 0,030 | 6,470 | 0,236 |
| t ₄ = t ₃ + Δt = 0,040 | 5,876 | 0,301 |

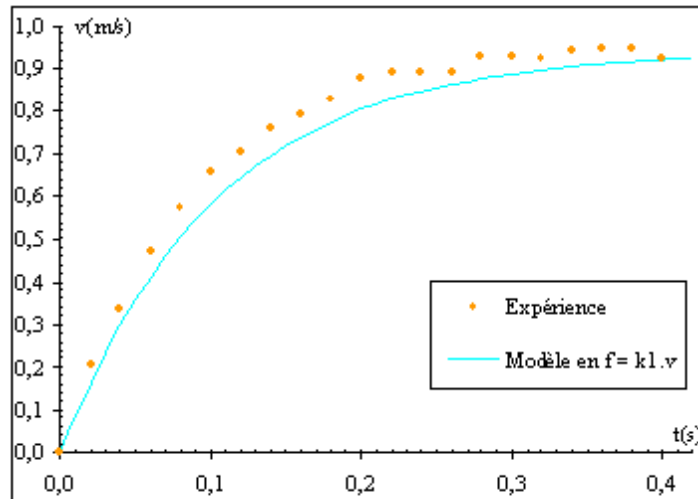
3) Résolution avec un tableur

• Les calculs fastidieux "à la main" peuvent être automatisés avec un ordinateur et un tableur, tel qu'Excel .

Cas n°1 : modélisation de f en $f = k_1 \cdot v$

a) Formule de calcul pour calculer t₁ dans la cellule A10: = A9+B\$3
 formule de calcul pour calculer v(t₁) dans la cellule B10: = B9+(B\$5-B\$4*B9)*B\$3

b) Graphe de v(t) obtenu par la méthode d'Euler et les points expérimentaux:



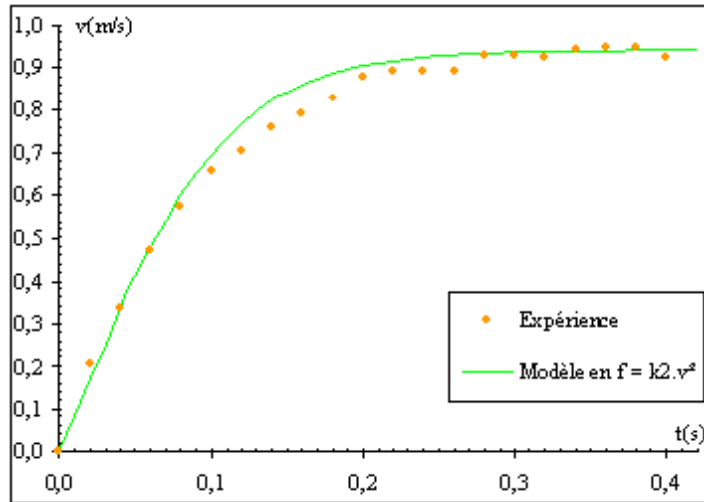
c) Le modèle en $f = k_1 \cdot v$ n'est pas satisfaisant car le graphe v(t) obtenu avec la méthode d'Euler est situé au-dessous des points expérimentaux.

Cas n°2 : modélisation en $f = k_2 \cdot v^2$

a) $a_2(t) = \frac{dv}{dt} = B - A_1 \cdot v = 8,64 - 9,78 \times v(t)$

b)

| t(s) | v(t) en (m.s ⁻¹) | a ₂ (t) en (m.s ⁻²) |
|--|------------------------------|--|
| t ₀ = 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| t ₁ = t ₀ + Δt = 0,010 | 0,086 | 0,086 |
| t ₂ = t ₁ + Δt = 0,020 | 0,172 | 0,172 |
| t ₃ = t ₂ + Δt = 0,030 | 0,256 | 0,256 |
| t ₄ = t ₃ + Δt = 0,040 | 0,336 | 0,336 |

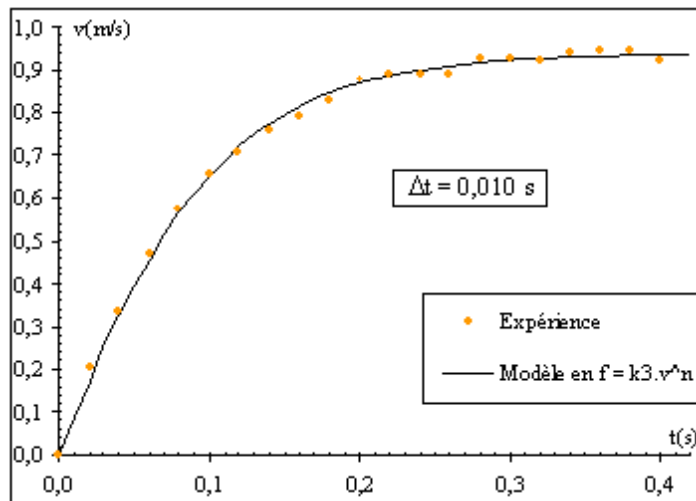
Cas n°2 : modélisation de f en $f = k_2 \cdot v^2$ a) formule de calcul pour calculer t_1 dans la cellule **A10**: = A9+B\$3formule de calcul pour calculer $v(t_1)$ dans la cellule **B10**: =B9+(B\$5-B\$4*B9^2)*B\$3b) graphe de $v(t)$ obtenu par la méthode d'Euler et les points expérimentaux.c) Le modèle $f = k_2 \cdot v^2$ n'est pas satisfaisant car le graphe $v(t)$ obtenu avec la méthode d'Euler passe au-dessus de certains points expérimentaux.**Cas n°3 : modélisation de f en $f = k_3 \cdot v^n$**

• Les deux modélisations précédentes n'étant pas satisfaisantes, on envisage une troisième possibilité : $f = k_3 \cdot v^n$. L'équation différentielle correspondante s'écrit :

| | | |
|-----------|---------------------|-------------------------------|
| Cas n°3 : | $f = k_3 \cdot v^n$ | $\frac{dv}{dt} + A_3 v^n = B$ |
|-----------|---------------------|-------------------------------|

a) Pour le modèle $f = k_1 \cdot v$, les points expérimentaux sont au-dessus du graphe $v(t)$ tandis que pour le modèle $f = k_2 \cdot v^2$ certains points expérimentaux sont au-dessous du graphe $v(t)$.On peut donc conclure que **n est compris entre 1 et 2** dans le modèle: $f = k_3 \cdot v^n$ b) Pour $v = v_{\text{lim}} = 0,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{cte}$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$:

équation (3): $A_3 \cdot v_{\text{lim}}^n = B \Leftrightarrow A_3 = \frac{B}{v_{\text{lim}}^n}$

c) formule de calcul pour A_3 dans la cellule **B4**: = B\$5/0,94^B6formule de calcul pour calculer t_1 dans la cellule **A11**: = A10+B\$3formule de calcul pour calculer $v(t_1)$ dans la cellule **B11**: = B10+(B\$5-B\$4*B10^B\$6)*B\$3d) La valeur de **n** avec le curseur qui donne la modélisation la plus satisfaisante est: **n = 1,5**e) Graphe de $v(t)$ obtenu par la méthode d'Euler et les points expérimentaux avec $n = 1,5$.

f) La modélisation de f la plus satisfaisante est: $f = k_3 \cdot v^{1,5}$

avec:

$$k_3 = m \cdot A_3 = 4,08 \cdot 10^{-3} \times 9,48 = \mathbf{3,87 \cdot 10^{-2} \text{ (S.I)}}$$

finalement:

$$\mathbf{f = 3,87 \cdot 10^{-2} \times v^{1,5}}$$

g) Lorsque le régime permanent est atteint, $v = v_{\text{lim}} = \mathbf{0,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$ donc: $f = 3,87 \cdot 10^{-2} \times 0,94 = \mathbf{3,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}}$

h) Poids de la bille: $P = m \cdot g = 4,08 \cdot 10^{-3} \times 9,80 = \mathbf{4,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}}$

$f + P_A$ en régime permanent

Poussé d'Archimède: $P_A = \rho_h \times V \times g = 920 \times (4\pi \times (5,0 \cdot 10^{-3})^3 / 3) \times 9,80 = \mathbf{4,7 \cdot 10^{-3} \text{ N}}$

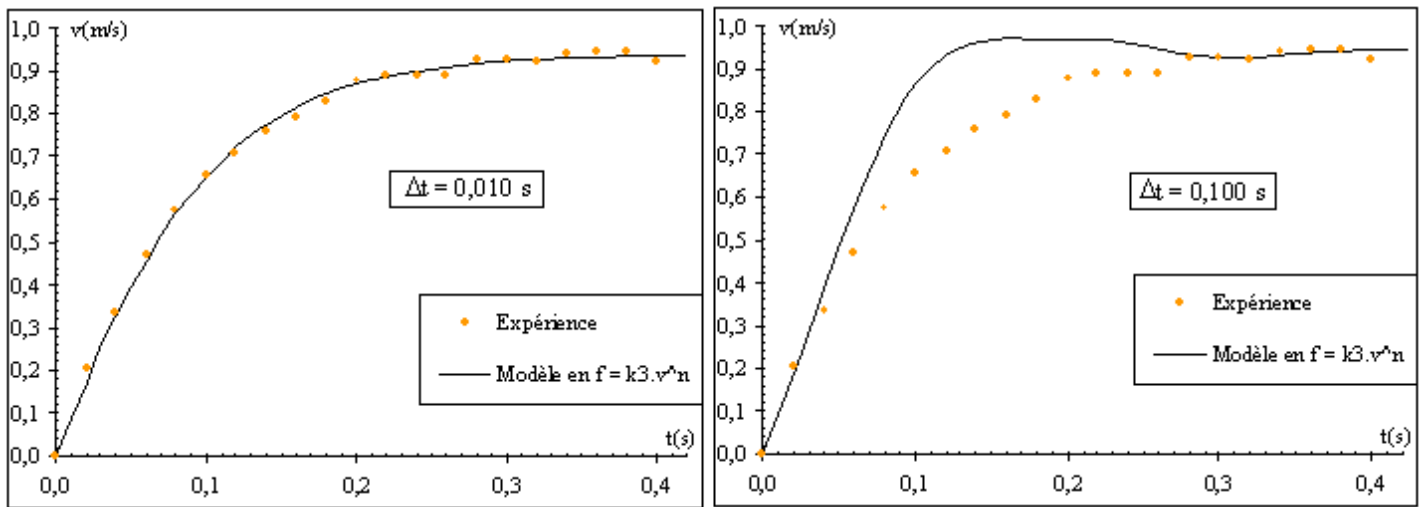
$$\mathbf{f + P_A = 3,5 \cdot 10^{-2} + 4,7 \cdot 10^{-3} = 3,97 \cdot 10^{-2} \text{ N} \approx 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ N} = P}$$

Le résultat pouvait être prévu car en régime permanent le vecteur vitesse est constant donc: $\square + \square + \square_A = \square$

En projection suivant un axe vertical orienté vers le bas: $P - f - P_A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P = f + P_A}$.

4) Influence du pas Δt sur la résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

a) Graphes de $v(t)$ pour $\Delta t = 0,010 \text{ s}$ et pour $\Delta t = 0,100 \text{ s}$:



b) Pour $\Delta t > 0,100 \text{ s}$, le graphe $v(t)$ s'éloigne nettement des points expérimentaux. Pour être applicable, la méthode d'Euler doit utiliser un pas d'intégration Δt "pas trop grand".

c) Pour une bonne modélisation $\Delta t = 0,010 \text{ s}$.

La constante de temps est : $\tau = 0,085 \text{ s}$

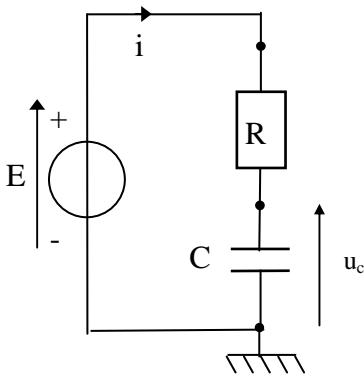
On a donc: $\tau / \Delta t = 8,5 \Leftrightarrow \Delta t = \tau / 8,5 \approx \tau / 10$.

Une condition d'utilisation de la méthode d'Euler sur Δt est donc: $\mathbf{\Delta t \leq \tau / 10}$.

IV APPLICATION DE LA METHODE D'EULER A LA CHARGE D'UN CONDENSATEUR

- On considère un circuit (RC) série alimenté par un générateur de tension constante E.

1) Schéma du circuit (RC) et équation différentielle sur la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur



Loi d'additivité des tensions: $E = R.i(t) + u_c(t)$

Or $i(t) = C.du_c / dt$

Donc:

$$E = R.C. du_c / dt + u_c(t)$$

En posant $\tau = RC$ et en divisant tous les termes par τ il vient:

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

2) Exprimons $u_c(t+\Delta t)$:

Pour des intervalles de temps Δt "petits" on peut faire l'approximation suivante: $\frac{du_c}{dt} \approx \frac{\Delta u_c}{\Delta t}$

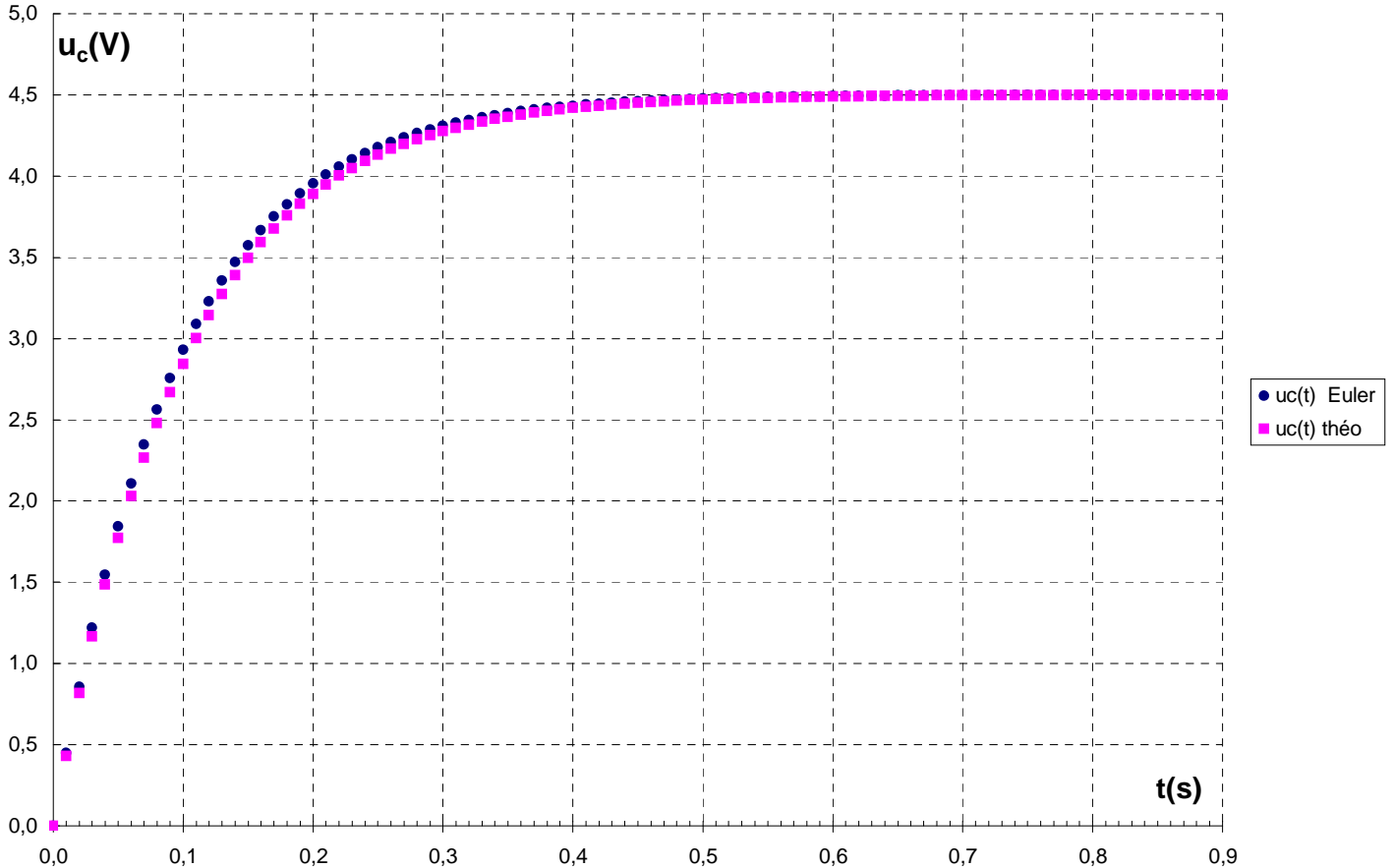
On a: $\frac{du_c}{dt} \approx \frac{\Delta u_c}{\Delta t} = \frac{E}{\tau} - \frac{u_c}{\tau}$ or $\Delta u_c = u_c(t+\Delta t) - u_c(t)$ donc il vient:

$$u_c(t + \Delta t) = u_c(t) + \left(\frac{E - u_c}{\tau} \right) \times \Delta t$$

- Dans la cellule B10 on tape: `=B9+H5*(H3-B9)/H4`

- Sachant qu'une solution de l'équation différentielle est $u_c(t) = E.(1 - \exp(-t/\tau))$, on tape dans la cellule C10 de la colonne $u_c(t)$ théo: `=H3*(1-EXP(-A10/H4))`

3) Allure des deux graphes:



On constate que les deux graphes sont pratiquement superposés.

4) Vérifions que la condition $\Delta t \ll \tau$ est valable: $\Delta t = 0,010$ s et $\tau = R.C = 0,10$ s donc $\Delta t \ll \tau$ avec $\Delta t = \tau / 10$.
si $\Delta t \approx \tau$ ou $\Delta t > \tau$ les graphes ne se superposent plus.