

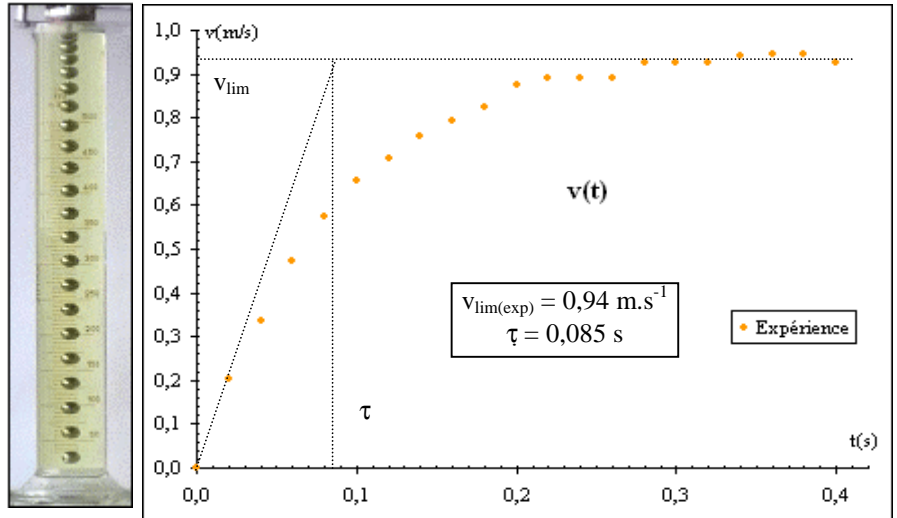
RESOLUTION D'UNE EQUATION PAR LA METHODE D'EULER (**Correction**)

Objectifs

- Mettre en oeuvre la méthode d'Euler pour déterminer une solution numérique d'une équation différentielle.
- Trouver le modèle le plus pertinent pour l'expression de la force de frottement fluide.

I EXPERIENCE

- On s'intéresse à la chute verticale d'une bille d'acier dans l'huile. Une chronophotographie de l'expérience et un pointage Aviméca ont permis d'obtenir le graphe $v(t)$ ci-contre.
- La vitesse limite v_{lim} et le temps caractéristique τ de la chute sont rappelés sur le graphe.
- Les caractéristiques de la bille d'acier sont :
 - Masse : $m = 4,08 \text{ g}$; Diamètre : $d = 10 \text{ mm}$; Volume V .
 - Masse volumique de la bille : $\rho = 7\,796 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
 - Masse volumique de l'huile : $\rho_h = 920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
 - Intensité de la pesanteur : $g = 9,80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$



II MODELISATION DE LA CHUTE

- Selon le type de force de frottement que l'on considère, l'équation différentielle du mouvement sur la vitesse s'écrit :

$$\text{Cas n°1: } f = k_1 \cdot v \quad \frac{dv}{dt} + A_1 v = B \quad (1)$$

$$\text{Cas n°2: } f = k_2 \cdot v^2 \quad \frac{dv}{dt} + A_2 v^2 = B \quad (2)$$

$$\text{avec } A = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad B = g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho} \right)$$

1) Valeur de la constante **B** avec **3 chiffres significatifs**: $B = g \left(1 - \frac{\rho_h}{\rho} \right) = 9,80 \times \left(1 - \frac{920}{7796} \right) = 8,64 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2) Si $v = v_{\text{lim}} = 0,94 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = \text{cte}$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$:

dans l'équation (1): $A_1 \cdot v_{\text{lim}} = B \Leftrightarrow A_1 = \frac{B}{v_{\text{lim}}} = \frac{8,64}{0,94} = 9,19 \text{ s}^{-1}$

dans l'équation (2): $A_2 \cdot v_{\text{lim}}^2 = B \Leftrightarrow A_2 = \frac{B}{v_{\text{lim}}^2} = \frac{8,64}{(0,94)^2} = 9,78 \text{ m}^{-1}$

- 3) Expressions numériques des deux équations différentielles:

$$\frac{dv}{dt} + 9,19 \cdot v = 8,64 \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + 9,78 \cdot v^2 = 8,64 \quad (2)$$

III RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE SELON LA METHODE D'EULER

1) La méthode d'Euler

- La méthode d'Euler est une **méthode numérique** de résolution d'une équation différentielle, qui est employée lorsqu'aucune **solution analytique** n'est possible. Pour des intervalles de temps Δt "petits" on peut faire l'approximation suivante: $\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$

avec $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$, variation de la vitesse entre les dates t et $t + \Delta t$.

a) 1^{er} cas: on a: $\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = B - A_1 \cdot v$ or $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$ donc il vient: $v(t + \Delta t) = v(t) + (B - A_1 \cdot v(t)) \times \Delta t$

b) 2nde cas: on a: $\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = B - A_2 \cdot v^2$ or $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$ donc il vient: $v(t + \Delta t) = v(t) + (B - A_2 \cdot v^2(t)) \times \Delta t$

Les constantes A_1 , A_2 et B étant connues, les conditions initiales étant connues et la valeur du "pas" Δt ayant été choisie, on peut construire point par point le graphe $v(t)$.

2) Calculs "à la main"

- $\Delta t = 0,010$ s.
- La bille est lâchée sans vitesse initiale à la date $t_0 = 0$.

Cas n°1 : modélisation de f en $f = k_1 \cdot v$

a)

Expression de t	Valeur de t (s)	Expression de v(t)	Valeur de v(t) (m.s ⁻¹)
t_0	0,000	$v(t_0)$	0,000
$t_1 = t_0 + \Delta t$	0,010	$v(t_1) = v(t_0) + (B - A_1 \cdot v(t_0)) \cdot \Delta t$	0,086
$t_2 = t_1 + \Delta t$	0,020	$v(t_2) = v(t_1) + (B - A_1 \cdot v(t_1)) \cdot \Delta t$	0,165
$t_3 = t_2 + \Delta t$	0,030	$v(t_3) = v(t_2) + (B - A_1 \cdot v(t_2)) \cdot \Delta t$	0,236
$t_4 = t_3 + \Delta t$	0,040	$v(t_4) = v(t_3) + (B - A_1 \cdot v(t_3)) \cdot \Delta t$	0,301

Cas n°2 : modélisation de f en $f = k_2 \cdot v^2$

b)

Expression de t	Valeur de t (s)	Expression de v(t)	Valeur de v(t) (m.s ⁻¹)
t_0	0,000	$v(t_0)$	0,000
$t_1 = t_0 + \Delta t$	0,010	$v(t_1) = v(t_0) + (B - A_2 \cdot v^2(t_0)) \cdot \Delta t$	0,086
$t_2 = t_1 + \Delta t$	0,020	$v(t_2) = v(t_1) + (B - A_2 \cdot v^2(t_1)) \cdot \Delta t$	0,172
$t_3 = t_2 + \Delta t$	0,030	$v(t_3) = v(t_2) + (B - A_2 \cdot v^2(t_2)) \cdot \Delta t$	0,256
$t_4 = t_3 + \Delta t$	0,040	$v(t_4) = v(t_3) + (B - A_2 \cdot v^2(t_3)) \cdot \Delta t$	0,336

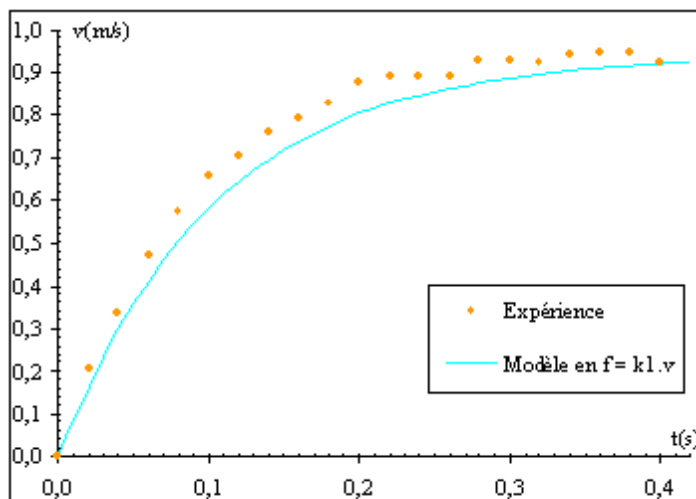
3) Résolution avec un tableur

- Les calculs fastidieux "à la main" peuvent être automatisés avec un ordinateur et un tableur, tel qu'Excel.

Cas n°1 : modélisation de f en $f = k_1 \cdot v$

- a) Formule de calcul pour calculer t_1 dans la cellule **A10**: = A9+B\$3
 formule de calcul pour calculer $v(t_1)$ dans la cellule **B10**: = B9+(B\$5-B\$4*B9)*B\$3

b) Graphe de $v(t)$ obtenu par la méthode d'Euler et les points expérimentaux:

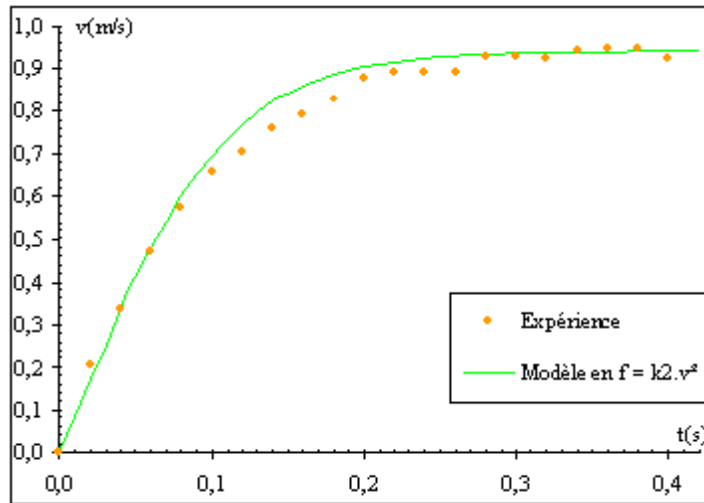


c) Le modèle en $f = k_1 \cdot v$ n'est pas satisfaisant car le graphe $v(t)$ obtenu avec la méthode d'Euler est situé au-dessous des points expérimentaux.

Cas n°2 : modélisation de f en $f = k_2 \cdot v^2$

- a) formule de calcul pour calculer t_1 dans la cellule **A10**: = A9+B\$3
 formule de calcul pour calculer $v(t_1)$ dans la cellule **B10**: =B9+(B\$5-B\$4*B9^2)*B\$3

b) graphe de $v(t)$ obtenu par la méthode d'Euler et les points expérimentaux.



c) Le modèle $f = k_2 \cdot v^2$ n'est pas satisfaisant car le graphe $v(t)$ obtenu avec la méthode d'Euler passe au-dessus de certains points expérimentaux.

Cas n°3 : modélisation de f en $f = k_3 \cdot v^n$

• Les deux modélisations précédentes n'étant pas satisfaisantes, on envisage une troisième possibilité : $f = k_3 \cdot v^n$. L'équation différentielle

correspondante s'écrit :

Cas n°3 :	$f = k_3 \cdot v^n$	$\frac{dv}{dt} + A_3 v^n = B$
-----------	---------------------	-------------------------------

a) Pour le modèle $f = k_1 \cdot v$, les points expérimentaux sont au-dessus du graphe $v(t)$ tandis que pour le modèle $f = k_2 \cdot v^2$ certains points expérimentaux sont au-dessous du graphe $v(t)$.

On peut donc conclure que **n est compris entre 1 et 2** dans le modèle: $f = k_3 \cdot v^n$

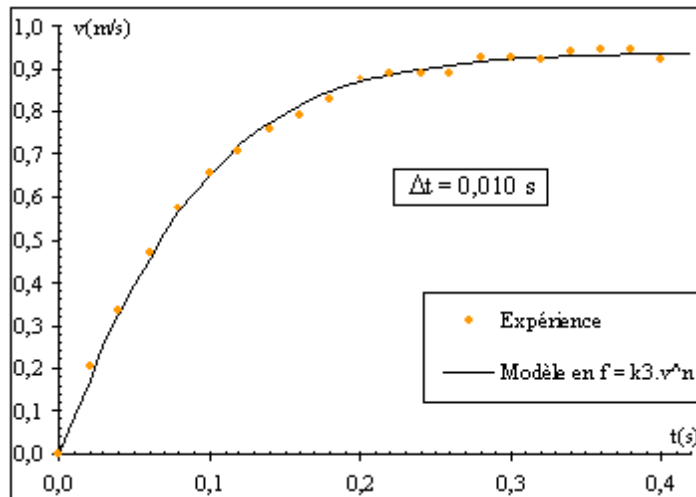
b) Pour $v = v_{lim} = 0,94 \text{ m.s}^{-1} = \text{cte}$ alors $\frac{dv}{dt} = 0$:

équation (3): $A_3 \cdot v_{lim}^n = B \Leftrightarrow A_3 = \frac{B}{v_{lim}^n}$

- c) formule de calcul pour A_3 dans la cellule **B4**: = B\$5/0,94^B6
 formule de calcul pour calculer t_1 dans la cellule **A11**: = A10+B\$3
 formule de calcul pour calculer $v(t_1)$ dans la cellule **B11**: = B10+(B\$5-B\$4*B10^B\$6)*B\$3

d) La valeur de **n** avec le curseur qui donne la modélisation la plus satisfaisante est: **n = 1,5**

e) Graphe de $v(t)$ obtenu par la méthode d'Euler et les points expérimentaux avec $n = 1,5$.



f) La modélisation de f la plus satisfaisante est: $f = k_3 \cdot v^{1,5}$

avec:

$$k_3 = m \cdot A_3 = 4,08 \cdot 10^{-3} \times 9,48 = \mathbf{3,87 \cdot 10^{-2}} \text{ (S.I)}$$

finalement:

$$\mathbf{f = 3,87 \cdot 10^{-2} \times v^{1,5}}$$

g) Lorsque le régime permanent est atteint, $v = v_{\text{lim}} = \mathbf{0,94 \text{ m.s}^{-1}}$ donc: $f = 3,87 \cdot 10^{-2} \times 0,94 = \mathbf{3,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}}$

h) Poids de la bille: $P = m \cdot g = 4,08 \cdot 10^{-3} \times 9,80 = \mathbf{4,0 \cdot 10^{-2} \text{ N}}$

$f + P_A$ en régime permanent

Poussé d'Archimède: $P_A = \rho_h \times V \times g = 920 \times (4\pi \times (5,0 \cdot 10^{-3})^3 / 3) \times 9,80 = \mathbf{4,7 \cdot 10^{-3} \text{ N}}$

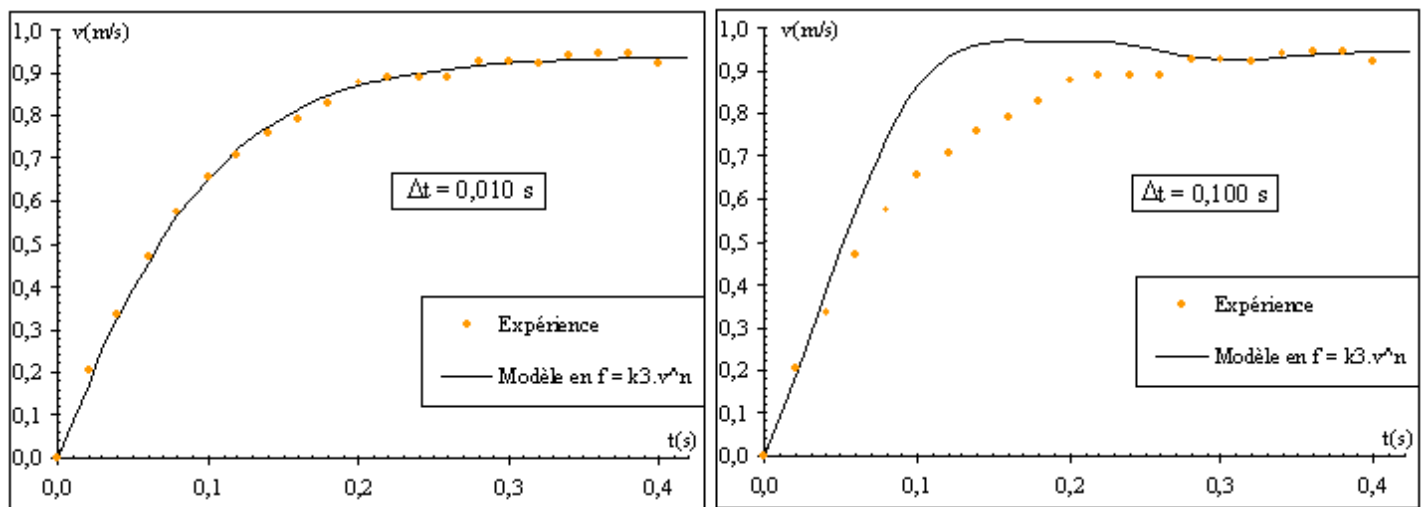
$$\mathbf{f + P_A = 3,5 \cdot 10^{-2} + 4,7 \cdot 10^{-3} = 3,97 \cdot 10^{-2} \text{ N} \approx 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ N} = P}$$

Le résultat pouvait être prévu car en régime permanent le vecteur vitesse est constant donc: $\vec{P} + \vec{f} + \vec{P}_A = \vec{0}$

En projection suivant un axe vertical orienté vers le bas: $P - f - P_A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P = f + P_A}$

4) Influence du pas Δt sur la résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

a) Graphes de $v(t)$ pour $\Delta t = 0,010 \text{ s}$ et pour $\Delta t = 0,100 \text{ s}$:



b) Pour $\Delta t > 0,100 \text{ s}$, le graphe $v(t)$ s'éloigne nettement des points expérimentaux. Pour être applicable, la méthode d'Euler doit utiliser un pas d'intégration Δt "pas trop grand".

c) Pour une bonne modélisation $\Delta t = 0,010 \text{ s}$.

La constante de temps est : $\tau = 0,085 \text{ s}$

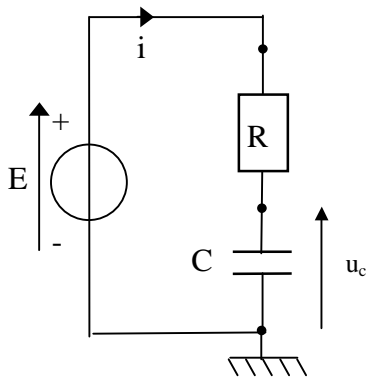
On a donc: $\tau / \Delta t = 8,5 \Leftrightarrow \Delta t = \tau / 8,5 \approx \tau / 10$.

Une condition d'utilisation de la méthode d'Euler sur Δt est donc: $\mathbf{\Delta t \leq \tau / 10}$.

IV APPLICATION DE LA METHODE D'EULER A LA CHARGE D'UN CONDENSATEUR

- On considère un circuit (RC) série alimenté par un générateur de tension constante E.

1) Schéma du circuit (RC) et équation différentielle sur la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur



Loi d'additivité des tensions: $E = R.i(t) + u_c(t)$
 Or $i(t) = C.du_c / dt$
 Donc: $E = R.C. du_c / dt + u_c(t)$
 En posant $\tau = RC$ et en divisant tous les termes par τ il vient:

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

2) Exprimons $u_c(t+\Delta t)$:

Pour des intervalles de temps Δt "petits" on peut faire l'approximation suivante: $\frac{du_c}{dt} \approx \frac{\Delta u_c}{\Delta t}$

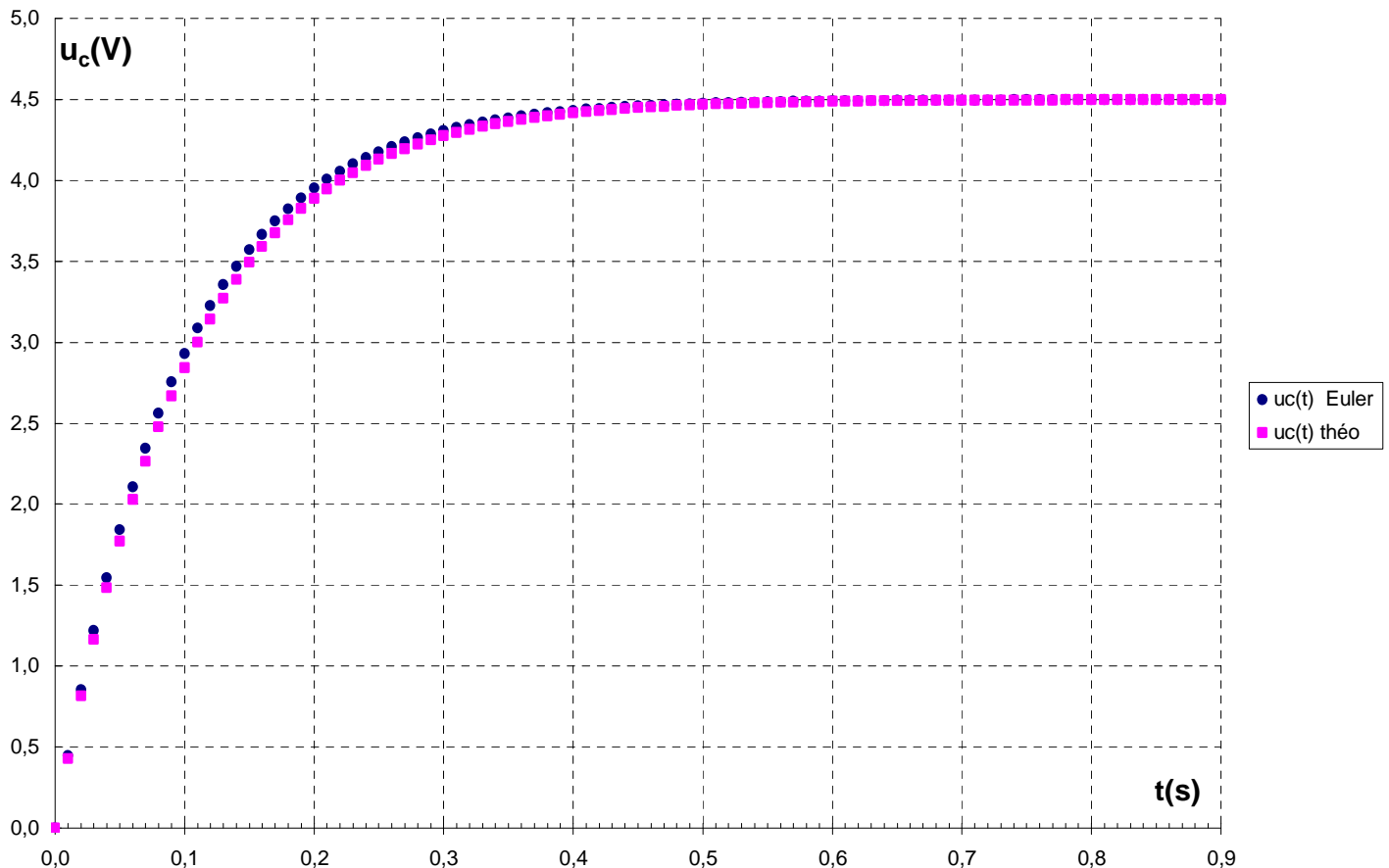
On a: $\frac{du_c}{dt} \approx \frac{\Delta u_c}{\Delta t} = \frac{E}{\tau} - \frac{u_c}{\tau}$ or $\Delta u_c = u_c(t+\Delta t) - u_c(t)$ donc il vient:

$$u_c(t + \Delta t) = u_c(t) + \left(\frac{E - u_c}{\tau} \right) \times \Delta t$$

- Dans la cellule B10 on tape: `=B9+H5*(H3-B9)/H4`

- Sachant qu'une solution de l'équation différentielle est $u_c(t) = E.(1 - \exp(-t/\tau))$, on tape dans la cellule C10 de la colonne $u_c(t)$ théo: `=H3*(1-EXP(-A10/H4))`

3) Allure des deux graphes:



On constate que les deux graphes sont pratiquement superposés.

4) Vérifions que la condition $\Delta t \ll \tau$ est valable: $\Delta t = 0,010$ s et $\tau = R.C = 0,10$ s donc $\Delta t \ll \tau$ avec $\Delta t = \tau / 10$.
 si $\Delta t \approx \tau$ ou $\Delta t > \tau$ les graphes ne se superposent plus.