

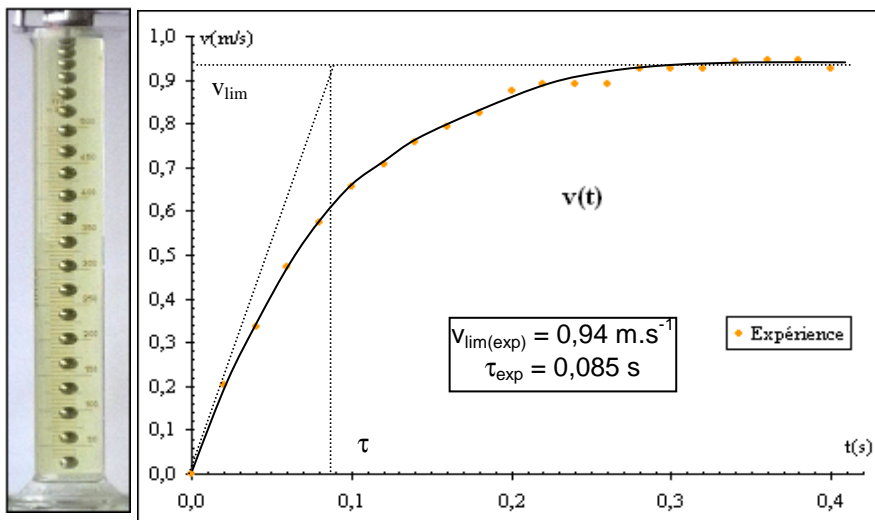
# RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE PAR LA METHODE D'EULER



- Objectifs**
- Mettre en œuvre la méthode d'Euler pour déterminer une solution numérique d'une équation différentielle.
  - Trouver le modèle le plus pertinent pour déterminer l'expression d'une force de frottement fluide.

## I. EXPERIENCE

- Une bille d'acier tombe verticalement dans de l'huile (voir photo). Une chronophotographie de l'expérience et un pointage Aviméca ont permis d'obtenir le graphe  $v(t)$  ci-contre.
- La vitesse limite  $v_{lim}$  et le temps caractéristique  $\tau$  de la chute sont rappelés sur le graphe.
- Les caractéristiques de la bille d'acier sont :
  - Masse :  $m = 4,08 \text{ g}$ ; Diamètre :  $d = 10 \text{ mm}$ ; Volume  $V$ .
  - Masse volumique de la bille :  $\rho = 7\,796 \text{ kg.m}^{-3}$
  - Masse volumique de l'huile :  $\rho_h = 920 \text{ kg.m}^{-3}$ .
  - Intensité de la pesanteur :  $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$



## II. MODELISATION DE LA CHUTE

- Selon le type de force de frottement que l'on considère, l'équation différentielle du mouvement sur la vitesse s'écrit :

$$\text{Cas n°1: } f = k_1 \cdot v \quad \frac{dv}{dt} + A_1 v = B \quad (1)$$

$$\text{Cas n°2: } f = k_2 \cdot v^2 \quad \frac{dv}{dt} + A_2 v^2 = B \quad (2)$$

$$\text{avec } A_1 = \frac{k_1}{m} \quad B = g \left( 1 - \frac{\rho_h}{\rho} \right) \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{k_2}{m}$$

- 1) Calculer la valeur de la constante **B** avec **3 chiffres significatifs**.
- 2) La détermination expérimentale de la valeur de la vitesse limite  $v_{lim}$  permet de calculer selon les modèles la valeur de  $A_1$  ou  $A_2$ . Calculer, à partir des équations différentielles, les valeurs de  $A_1$  et  $A_2$  avec **3 chiffres significatifs**.
- 3) Écrire l'expression numérique des deux équations différentielles, en remplaçant  $A_1$ ,  $A_2$  et **B** par leur valeur.

## III. RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE SELON LA METHODE D'EULER

### 1) La méthode d'Euler

- Principe : pour des intervalles de temps  $\Delta t$  "petits" on peut faire l'approximation suivante:  $a(t) = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

soit :  $v(t+\Delta t) = v(t) + a(t) \times \Delta t$ .

$\Delta t$  est appelé **pas d'itération** de la méthode d'Euler. L'expression de  $a(t)$  dépend du modèle utilisé.

Dans la suite on choisit :  $\Delta t = 0,010 \text{ s}$ .

### 2) Calculs "à la main"

- **Cas n°1 : modélisation en  $f = k_1 \cdot v$ :**

La bille est lâchée **sans vitesse initiale** à la date  $t_0 = 0,000 \text{ s}$ .

- a) On a :  $v(t+\Delta t) = v(t) + a_1(t) \times \Delta t$ . Écrire l'expression de  $a_1(t)$ .
- b) Calculer "à la main" les premières valeurs de  $v(t)$  et  $a_1(t)$  et compléter le tableau ci-dessous, en gardant **3 chiffres significatifs**.

t(s)	v(t) en ( $\text{m.s}^{-1}$ )	$a_1(t)$ en ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$t_0 = 0,000$	0,000	
$t_1 = t_0 + \Delta t =$		
$t_2 = t_1 + \Delta t =$		
$t_3 = t_2 + \Delta t =$		
$t_4 = t_3 + \Delta t =$		

- **Cas n°2 : modélisation en  $f = k_2 \cdot v^2$**

Répondre aux mêmes questions et compléter le tableau ci-dessous :

t(s)	v(t) en ( $\text{m.s}^{-1}$ )	$a_2(t)$ en ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$t_0 = 0,000$	0,000	
$t_1 = t_0 + \Delta t =$		
$t_2 = t_1 + \Delta t =$		
$t_3 = t_2 + \Delta t =$		
$t_4 = t_3 + \Delta t =$		

### 3) Résolution avec un tableur

• Les calculs fastidieux "à la main" peuvent être automatisés avec un ordinateur et un tableur, tel qu'Excel © . Ouvrir le fichier: "**Euler\_eleve.xls**". La feuille "**Expérience**" rappelle les résultats expérimentaux.

#### Cas n°1 : modélisation de f en $f = k_1 \cdot v$

- Cliquer sur la feuille "**Modèle en  $f = k_1 \cdot v$** ".
- Entrer la valeur du pas  $\Delta t$  et les valeurs des constantes **A<sub>1</sub>** et **B** dans les cellules correspondantes.

*Remarque:* pour fixer les valeurs de  $\Delta t$  , **A<sub>1</sub>** et **B** il faudra taper respectivement **B\$4** , **B\$5** et **B\$6** dans les cellules pour calculer la vitesse et l'accélération.

a) Écrire la formule de calcul pour calculer **t<sub>1</sub>** dans la cellule **A11**, et les formules de calcul pour calculer **a(t<sub>0</sub>)** dans la cellule **C10** , **v(t<sub>1</sub>)** dans la cellule **B11** et **a(t<sub>1</sub>)** dans la cellule **C10**. Faire vérifier les formules avant de continuer.

• Copier les formules en sélectionnant les cellules **A11** , **B11** et **C11** puis en tirant sur la "croix" noire en bas à droite des cellules sélectionnées jusqu'à la **ligne 52** incluse. Vérifier les valeurs de **v(t)** affichées avec celles calculées "à la main".

b) Le modèle en  $f = k_1 \cdot v$  est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

#### Cas n°2 : modélisation de f en $f = k_2 \cdot v^2$

- Cliquer sur la feuille "**Modèle en  $f = k_2 \cdot v^2$** ". Entrer les valeurs des différentes constantes.

*Remarque:* pour faire calculer **v(t<sub>1</sub>)<sup>2</sup>**, il faut entrer la formule : **B10^2**.

a) Faire calculer par le tableur les vitesses et accélérations jusqu'à la **ligne 52** incluse.

b) Le modèle  $f = k_2 \cdot v^2$  est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

#### Cas n°3 : modélisation de f en $f = k_3 \cdot v^n$

• Les deux modélisations précédentes n'étant pas satisfaisantes, on envisage une troisième possibilité :  $f = k_3 \cdot v^n$ . L'équation différentielle correspondante s'écrit :

Cas n°3 :	$f = k_3 \cdot v^n$	$\frac{dv}{dt} + A_3 v^n = B$
-----------	---------------------	-------------------------------

a) A partir des deux études précédentes, quelles inégalités peut-on envisager pour la valeur de **n** ?

- Cliquer sur la feuille "**Modèle en  $f = k_3 \cdot v^n$** ". La valeur de **n** ne pourra varier qu'entre **1** et **2** avec le curseur.
- Entrer la valeur de la constante **B** et choisir le pas  $\Delta t = 0,010$  s en utilisant le curseur.

b) Exprimer la constante **A<sub>3</sub>** en fonction de **B**, **v<sub>lim</sub>** et **n**.

Établir la formule de calcul pour **A<sub>3</sub>** dans la cellule **B4**, et faire calculer par le tableur les vitesses et accélérations jusqu'à la **ligne 51** incluse.

d) Rechercher la valeur de **n** avec le curseur qui donne la modélisation la plus satisfaisante. Noter cette valeur.

e) Donner la modélisation de **f** la plus satisfaisante et l'expression numérique de **f**.

f) Calculer la valeur de **f** lorsque le régime permanent est atteint.

g) Comparer le poids **P** de la bille à la valeur **f + F<sub>A</sub>** en régime permanent (**F<sub>A</sub>** est la poussée d'Archimède). Le résultat pouvait-il être prévu ? Pourquoi ?

### 4) Influence du pas $\Delta t$ sur la résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler

- Donner à **n** la valeur correspondant à la meilleure modélisation.
- Modifier le pas  $\Delta t$  en faisant varier sa valeur avec le curseur entre **0,001 s** et **0,100 s**.

a) Quelles observations peut-on faire ? Conclusion ?

b) La valeur initiale de  $\Delta t$  choisie pour appliquer la méthode d'Euler était-elle judicieuse ? Pourquoi ?

c) Quel inconvénient induit le choix  $\Delta t = 0,001$  s ?

d) Comparer la valeur du pas  $\Delta t$  donnant une modélisation satisfaisante à la valeur de la constante de temps  $\tau$ . En déduire une condition d'utilisation de la méthode d'Euler sur  $\Delta t$ .

### 5) Théorie (s'il reste du temps)

- Démontrer l'expression de l'équation différentielle dans le cas du modèle de force en  $f = k_1 \cdot v$ .

