

UNE BREVE HISTOIRE DES GAMMES

- Objectifs:**
- Comprendre la construction d'une gamme de notes.
 - Étudier la gamme naturelle de Pythagore et la gamme tempérée de J.S Bach.

I CONSTRUCTION D'UNE GAMME

1) Définitions

- On appelle **intervalle** entre deux notes le rapport de leur fréquence (hauteur). Le rapport $3/2$ est jugé agréable à l'oreille: il est dit *consonant*, alors que la rapport 7 est considéré comme *dissonant*.
- Une **octave** est un intervalle de valeur égal à 2. Une note est à l'octave d'une autre si sa fréquence est deux fois plus grande. Par exemple, la note La_4 à 880 Hz est à l'octave de la note La_3 à 440 Hz.
- Une **gamme** est l'ensemble des notes comprises dans une octave. Construire une gamme consiste à choisir et ranger une série de notes, comprises à l'intérieur d'une octave ayant entre-elles des propriétés de consonance (des notes "qui s'aiment " comme le disait Mozart enfant).

2) Gammes naturelles et gamme tempérée

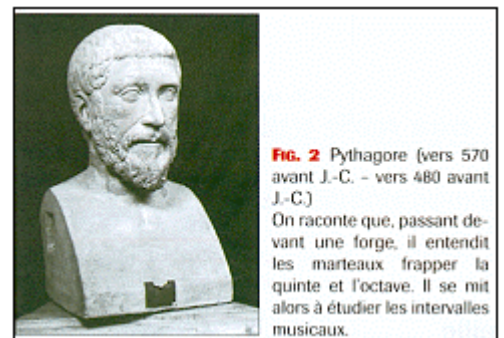
- Jusqu'au XVII^e siècle, les gammes utilisées en Occident étaient des "**gammes naturelles**". Elles étaient construites à partir de sons harmoniques émis par une corde tendue. L'une des premières gammes naturelles est la gamme de Pythagore utilisée dans la Grèce antique. De nombreuses **gammes naturelles** ont été utilisées mais elles présentaient toutes un inconvénient majeur: **l'intervalle entre deux notes d'une octave n'est pas constant**. On ne peut donc pas modifier d'un même intervalle la fréquence de toutes les notes d'une oeuvre musicale pour la transposer dans une tonalité différente.
- A la fin du XVII^e siècle, une gamme se rapprochant de la gamme naturelle a été construite: **la gamme tempérée**. Les intervalles de cette gamme sont constants et les petits défauts de justesse de cette gamme sont compensés par une grande facilité d'utilisation.

II LA GAMME NATURELLE DE PYTHAGORE

- Conformément à ses critères d'harmonie, Pythagore utilisait le rapport de fréquence $3/2$ (appelé **quinte**) et accessoirement $2/1$ (**octave**) pour construire une gamme de notes consonantes. On se propose d'appliquer ce système pour calculer les fréquences des notes comprises entre le Do_3 de fréquence $f_1 = 261,6$ Hz (utilisée comme référence) et le Do_4 à 523,2 Hz ($2f_1$).
- **Principe:** à partir de la fréquence f_1 du Do_3 , on peut calculer les fréquences f_2 et f_3 de deux nouvelles notes:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{3}{2}$$

- 1) Déterminer les valeurs des fréquences f_2 et f_3 .
- 2) La valeur de f_2 n'étant pas dans le domaine de fréquence recherché (261,6 Hz à 523,2 Hz), on la multiplie par deux pour trouver la fréquence de sa note homologue dans la gamme Do_3 - Do_4 . En déduire alors la valeur de f_2 dans l'octave choisie.
- 3) A partir de f_3 , on obtient toutes les autres notes en appliquant toujours la même méthode: on trouve la fréquence d'une note en multipliant la précédente par $3/2$, puis en divisant au besoin le résultat par deux pour trouver la fréquence dans la gamme Do_3 - Do_4 .



Note	Fréquence (Hz)	Fréquences en fonction de f_1
Do_3	261,6	f_1
Ré		
Mi		
Fa		
Sol		
La		
Si		
Do_4	523,2	$2 f_1$

Déterminer les 4 autres fréquences, f_4, f_5, f_6 et f_7 .

4) Classer les fréquences par ordre croissant et compléter le tableau en attribuant à chaque fréquence la note correspondante.

5) Remplir la dernière colonne en exprimant la fréquence de chaque note sous la forme d'une fraction de f_1 .

Les fréquences constituant la gamme sont appelés **degrés diatoniques**. Les rapports de fréquence de la gamme naturelle de Pythagore sont compliqués. D'autres gammes naturelles sont apparues par la suite avec des rapports de fréquence plus simples.

II LA GAMME TEMPEREE DE J.S BACH

1) Présentation

• La gamme qui est la gamme musicale que nous utilisons de nos jours, a été élaborée à la fin du XVII^e siècle par A. Werckmeister (1645-1706). Quelques années plus tard, elle s'est imposée à l'ensemble de la musique européenne, en particulier sous l'impulsion de J.S. Bach et de J.P Rameau.

• La gamme tempérée est construite en divisant l'octave en **12 intervalles égaux** de valeur $t_{1/2}$ appelés **demi-ton**.

Soient f_1, f_2, \dots, f_{12} les fréquences successives séparées par un intervalle d'un demi-ton. Nous avons donc: $(f_2/f_1) = t_{1/2}$ et

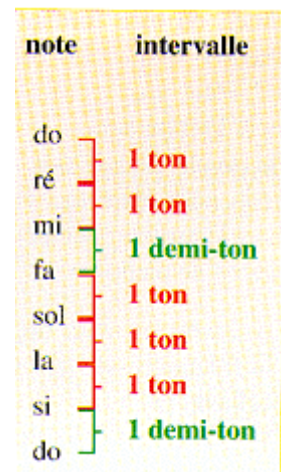
$$f_{12}/f_1 = (f_{12}/f_{11}) \times (f_{11}/f_{10}) \times \dots \times (f_2/f_1) \Leftrightarrow 2 = (t_{1/2})^{12} \Leftrightarrow t_{1/2} = 2^{1/12}$$

Ainsi, la valeur du demi-ton est égale à $2^{1/12}$.

Le ton est un intervalle de 2 demi-tons: il vaut $2^{1/12} \times 2^{1/12} = 2^{2/12}$. Deux notes sont séparées de n demi-tons si le rapport de leur fréquence est $2^{n/12}$

• Pour la gamme de Do₃ médium, les notes sont séparées à partir de celle du Do₃ par des intervalles de ton et demi-ton comme l'indique la figure ci-contre.

Note	Fréquence (Hz)	Fréquences en fonction de f_1
Do		f_1
Ré		
Mi		
Fa		
Sol		
La		
Si		
Do		$2 f_1$



a) Construire la gamme de fréquence en Do₃ médium en complétant la troisième colonne du tableau ci-contre: on exprimera les fréquences sous la forme $2^{n/12}$.

b) Sachant que la hauteur du La₃ est fixée (arbitrairement) à 440,0 Hz, calculer les fréquences des notes comprises entre le Do₃ et le Do₄ dans la gamme tempérée.

c) Comparer les fréquences obtenues avec les fréquences des notes de la gamme naturelle de Pythagore.

d) Quel est l'intervalle de quinte de la gamme naturelle entre le Sol₃ et le Do₃ ?

e) Même question pour la gamme tempérée.

f) Pourquoi dit-on que la consonance de quinte dans la gamme tempérée est pratiquement parfaite ?

g) Pourquoi dit-on que les notes Sol₃ et Do₃ sont séparées d'une quinte ?

2) Les notes altérées

• Lorsque les notes sont altérées, par un dièse (#) ou un bémol (b), leur hauteur est augmentée ou diminuée d'un demi-ton.

a) Quelle est la fréquence du Sol₃ # dans la gamme tempérée ?

b) Montrer que la fréquence du Ré# est égale à celle du Mi^b dans la gamme tempérée.

c) On transpose une partition en changeant sa tonalité: cette opération consiste à modifier toutes les notes d'un même intervalle. La tonalité d'une oeuvre est augmentée de 2 tons. Par quelle note le Do₃ est-il remplacé ?