

# LA NUMERATION

- Objectifs:**
- Connaître les différents systèmes de numération.
  - Savoir convertir un nombre décimal dans différentes bases.

## Introduction:

- Depuis la nuit des temps, l'Homme a eu besoin de **compter** et de **calculer**. Selon les civilisations, divers **systèmes de numération** ont été mis en place puis abandonnés.
- A l'heure actuelle, nous utilisons le **système de numération décimal**. Ce système s'est imposé en Europe à partir du 10<sup>ème</sup> siècle. Aujourd'hui le système décimal est quasiment universel. Cependant il est mal adapté au codage des informations pour un ordinateur: on lui préfère le **système binaire**.

## I. LES BASES DE NUMERATION

### 1) Chiffre (ou symbole) et nombre

- Dans toute numération, il faut distinguer les **chiffres** (ou symboles) et les **nombres**.
- Un **nombre** est le résultat du comptage d'un ensemble d'objets, d'animaux, de personnes ... Un **nombre** s'écrit avec un ou plusieurs **chiffres** (ou symboles).
- Dans le **système décimal**, les **nombres** sont écrits à partir des **dix chiffres: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**.

#### Exemples:

- une année comporte douze mois: 12 est un **nombre** comportant deux **chiffres**: 1 et 2.
- l'année 2008 est un nombre comportant 4 chiffres (2, 0, 0 et 8).
- une semaine contient 7 jours: 7 est un **nombre** qui s'écrit avec un seul **chiffre** (7).

### 2) Numération additive et numération de position

- Afin de dénombrer des ensembles, l'Homme a dû mettre au point des techniques de numération. Il existe deux grandes techniques de numération: **la numération additive** et **la numération de position**.

- Dans la **numération additive**, chaque symbole a une valeur propre et il suffit d'ajouter les valeurs des symboles pour obtenir le nombre.
- Dans la **numération de position**, la valeur des symboles change en fonction de leur place dans le nombre.

Exemple: dans le système décimal, le chiffre **7** des nombres **71** et **17** n'a pas la même signification.

- Que représente le chiffre **7** dans le nombre **71** et le chiffre **7** dans le nombre **17** ? Quelle est "la valeur" du chiffre **7** dans les deux nombres **71** et **17** ?
- Le **système décimal** est-il un système de numération **additive** ou de **position** ? Pourquoi ?
- Dans un système de **numération additive**, le "zéro" est-il utile ? Pourquoi ?
- Même question pour un système de **numération de position**.

### 3) Quelques bases de numération positionnelles

- Les Hommes ont pris l'habitude de compter par "**paquets**".
- La **numération décimale** regroupe les éléments à dénombrer par "**paquets de dix**". On dit qu'on utilise la **base dix** ou **base décimale**. Le tableau ci-contre présente quelques unes des principales bases de numération de position:

Base	Système
2	Binaire
8	Octal
<b>10</b>	<b>Décimal</b>
12	Duodécimal
16	Hexadécimal
20	Vicésimal
60	Sexagésimal

• **Exemples:** nous allons écrire le nombre **2583** dans différentes bases:

**En base 10 :** on utilise les chiffres de 0 à 9 et les puissances de 10.

Numéro du rang	.....	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres		0	2	5	8	3	
Valeur		$0 \times 10^4$	$2 \times 10^3$	$5 \times 10^2$	$8 \times 10^1$	$3 \times 10^0$	
		0 +	2000 +	500 +	80 +	3	= 2583

**En base 8 :** on utilise les chiffres de 0 à 7 et les puissances de 8.

Numéro du rang	.....	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres		0	5	0	2	7	
Valeur		$0 \times 8^4$	$5 \times 8^3$	$0 \times 8^2$	$2 \times 8^1$	$7 \times 8^0$	
		0 +	2560 +	0 +	16 +	7	= 2583

$$2583 = 5 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$

ainsi  $(2583)_{\text{décimal}} = (5027)_{\text{octal}}$

**En base 2:** on utilise les chiffres 0 et 1 et les puissances de 2

Numéro du rang	Rang 11	Rang 10	Rang 9	Rang 8	Rang 7	Rang 6	Rang 5	Rang 4	Rang 3	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	
Valeur	$1 \times 2^{11}$	$0 \times 2^{10}$	$1 \times 2^9$	$0 \times 2^8$	$0 \times 2^7$	$0 \times 2^6$	$0 \times 2^5$	$1 \times 2^4$	$0 \times 2^3$	$1 \times 2^2$	$1 \times 2^1$	$1 \times 2^0$	
	2048	+0	+512	+0	+0	+0	+0	+16	+0	+4	+2	+1	= 2583

$$2583 = 1 \times 2^{12} + 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

ainsi  $(2583)_{\text{décimal}} = (101000010111)_{\text{binaire}}$

- **en base 16:** on utilise les chiffres de 0 à 9 puis les lettres de A à F et les puissances de 16.

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Numéro du rang	.....	Rang 2	Rang 1	Rang 0	
Chiffres		A	1	7	
Valeur		$10 \times 16^2$	$1 \times 16^1$	$7 \times 16^0$	
		2560	16	7	= 2583

$$2583 = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 7 \times 16^0$$

ainsi  $(2583)_{\text{décimal}} = (A17)_{\text{hexadécimal}}$

• Pour écrire un nombre N dans une base b en on décompose ce nombre dans l'ordre des puissances décroissantes de la base.

Le nombre N s'écrit de façon unique sous la forme:  $N = a_n \times b^n + \dots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$

- Avec:
- n: un entier naturel
  - b: la base de numération
  - $a_i$ : les chiffres associés à la base tels que  $0 \leq a_i < b$ .

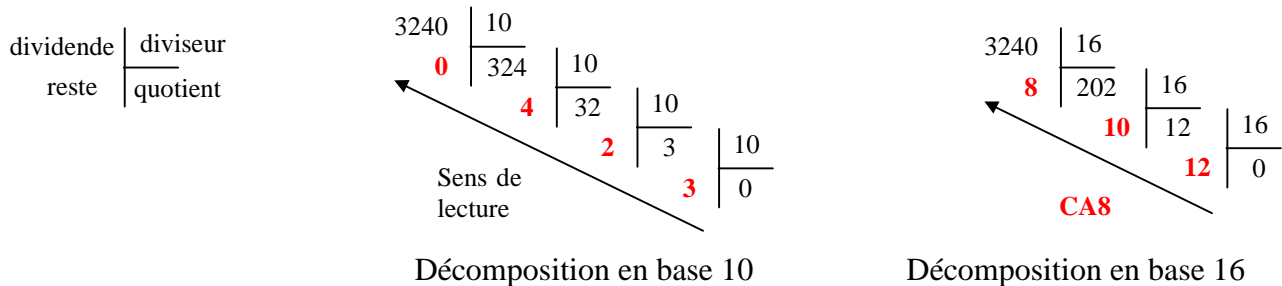
Comme ces systèmes de numération sont positionnelles, on peut écrire la suite des chiffres sous la forme:

$$N = (a_n \dots a_2 a_1 a_0)$$

### 4) Méthode de décomposition d'un nombre dans une base par la méthode des divisions successives

- La méthode de décomposition par **divisions successives** consiste à diviser le nombre plusieurs fois (si nécessaire) dans la base choisie jusqu'à obtenir un **quotient nul**.
- Les **restes successifs** des divisions, pris dans leur **ordre inverse**, forment le nombre désiré.

• Les exemples ci-contre montrent la décomposition du nombre 3240 dans la base 10, puis dans la base 16.



- Traduire le nombre (2008)<sub>dec</sub> en base 16.
- Traduire de même, le nombre (2008)<sub>dec</sub> en base 8 puis en base 2.

• Ces calculs longs et fastidieux, peuvent être **automatisés** avec un tableur comme Excel. En effet, Excel possède deux fonctions utiles pour ce type de calcul:

- **Quotient**(dividende; diviseur): elle donne **le quotient** de la division du **dividende** par le **diviseur**
- **Mod**(dividende; diviseur): elle donne **le reste** de la division du **dividende** par le **diviseur**

Exemples: si dans une cellule on tape: = quotient(3240; 10) il s'affiche la valeur 324 car 3240 / 10 = 324  
 si dans une cellule on tape: = mod(3240; 10) il s'affiche la valeur 0 car le reste de la division 3240 / 10 = 324 est égal à 0.

*Remarque: pour que ces fonction soient actives dans Excel, il faut que les macros complémentaires:*

- Utilitaire d'analyse
- Utilitaire d'analyse VBA

*soient sélectionnées.*

- Ouvrir le fichier "**Méthode de décomposition par divisions successives élève.xls**".

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Méthode de décomposition d'un nombre dans une base par la méthode des divisions successives								
2									
3	Nombre	3240		Base	10				
4									
5	Quotient	Reste							
6	3240								
7	324	0							

- Quelle fonction doit-on taper dans la cellule **A7** pour quelle donne **le quotient** de la **division** de **A6** par la base **E3** ?

*Remarque: pour que la valeur de E3 soit considérée comme une constante on tapera: \$E\$3 .*

Faire vérifier votre formule et la taper dans la cellule **A7**.

- b) Quelle fonction doit-on taper dans la cellule **B7** pour quelle donne **le reste** de la division de **A6** par la base **E3** ? Faire vérifier votre formule et la taper dans la cellule **B7**.
- c) Sélectionner les cellules **A7** et **B7** et copier les formules "**en tirant**" les cellules vers le bas avec la croix dans le coin droit en bas. Tirer jusqu'à la ligne **28**. A partir de quelle valeur de la colonne **Quotient** peut-on lire le nombre dans la base choisie dans la colonne **Reste** ? Enregistrer le fichier.
- d) Vérifier avec le logiciel Excel les calculs effectués en a) et b) pour le nombre 2008. Essayer d'autres bases (2, 12, 20, 60 ....).
- e) La calculatrice Windows fait aussi les conversions entre les différentes bases: essayer en allant sur, **Démarrer / Programmes / Accessoires / Calculatrice**.